

I. Quelques règles (axiomes d'incidence)

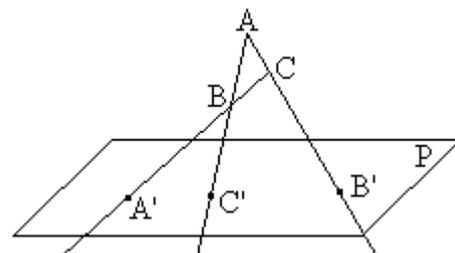
Axiome 1 : Par deux points distincts A et B passe une seule droite. Cette droite est notée (AB).

Axiome 2 : Par trois points non alignés A, B et C passe un seul plan. Ce plan est noté (ABC).

Axiome 3 : Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan P.

Axiome 4 : Si deux plans sont sécants, leur intersection est une droite.

Exercice : P est un plan ; A, B, C sont trois points non alignés qui n'appartiennent pas à P. On suppose que (AB) coupe P en C', que (AC) coupe P en B' et que (BC) coupe P en A'.
Montrer que les points A', B' et C' sont alignés.

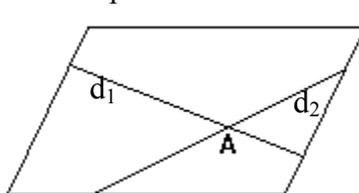


II. Position relative de droites et de plans

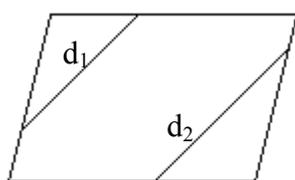
a) Position relative de deux droites

Deux droites de l'espace sont :

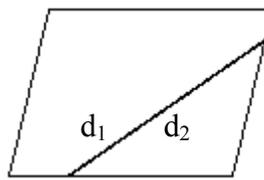
- soit coplanaires



d_1 et d_2 sont sécantes en A.

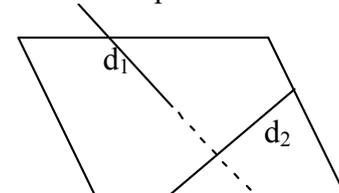


d_1 et d_2 sont strictement parallèles



d_1 et d_2 sont confondues

- soit non coplanaires

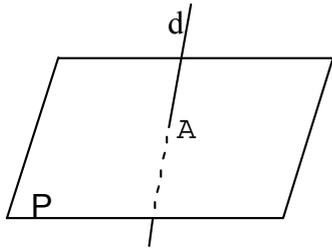


Aucun plan ne contient d_1 et d_2 .

b) Position relative d'une droite et d'un plan

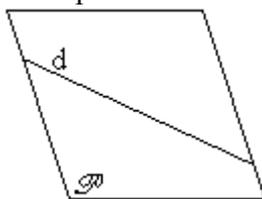
Une droite et un plan de l'espace sont :

- soit sécants

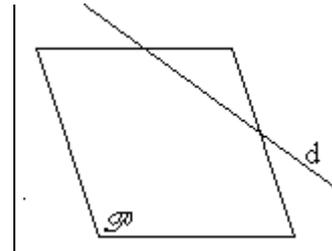


d et P ont un point d'intersection A

- soit parallèles



d est contenue dans P.

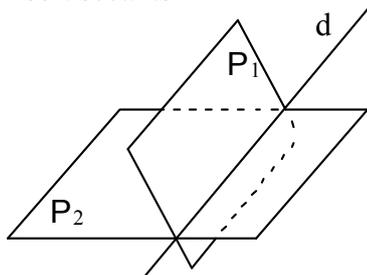


d et P sont strictement parallèles.

c) Position relative de deux plans

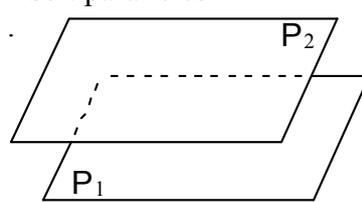
Deux plans sont :

- soit sécants

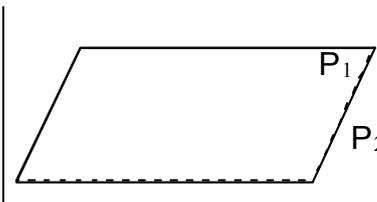


P_1 et P_2 ont une droite d'intersection d

- soit parallèles



P_1 et P_2 sont strictement parallèles



P_1 et P_2 sont confondus

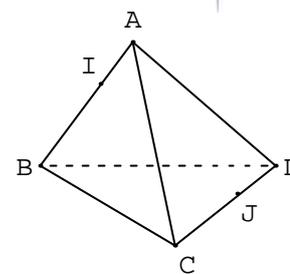
Exercice :

Déterminer l'intersection de plans sécants :

ABCD est un tétraèdre.

I et J sont des points des arêtes [AB] et [CD].

Déterminer l'intersection des plans (ABJ) et (CDI).



III. Le parallélisme dans l'espace

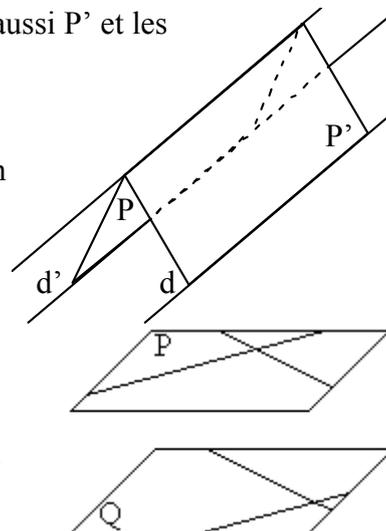
a) Parallélisme entre droites

Propriété 1 :

Si P et P' sont deux plans parallèles, alors tout plan Q qui coupe P coupe aussi P' et les droites d'intersection sont parallèles.

Propriété 2 : (théorème du toit)

d et d' sont deux droites parallèles. P est un plan contenant d, et P' un plan contenant d'. Si, en outre, les plans P et P' sont sécants, alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à d et à d'.



b) Parallélisme entre plans

Propriété 3 :

Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q, alors les plans P et Q sont parallèles.

c) Parallélisme entre droite et plan

Propriété 4 :

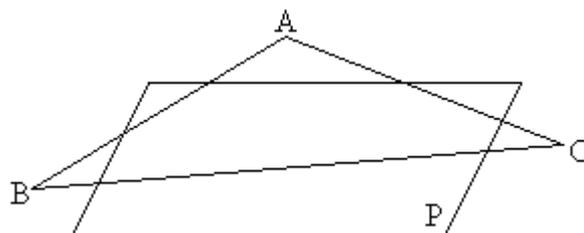
Si une droite d est parallèle à une droite d', alors la droite d est parallèle à tout plan contenant la droite d'.

Propriété 5 :

Si deux plans sont parallèles, alors toute droite de l'un des plans est parallèle à l'autre plan.

Exercice : Soit un plan P et un triangle ABC tels que (AB) et (AC) soient parallèles à P.

- a) Montrer que (BC) est parallèle à P.
- b) Montrer que la médiane du triangle ABC, issue de A, est parallèle à P.

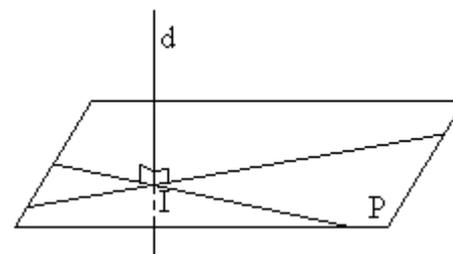


IV. Orthogonalité

1) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition :

I est le point d'intersection d'une droite d et d'un plan P. On dit que la droite d et le plan P sont **orthogonaux** si d est perpendiculaire à deux droites de P passant par I.



Propriété 1 :

- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

Propriété 2 :

- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.

2) Orthogonalité de deux droites du plan

Définition : Dire que deux droites d et Δ (non nécessairement coplanaires) sont **orthogonales** signifie que les parallèles à d et Δ menées par un point I quelconque sont perpendiculaires.

Propriété 3 :

Si une droite d et un plan P sont orthogonaux, alors d est orthogonale à toute droite Δ contenue dans P .

Propriété 4 :

Pour qu'une droite d et un plan P soient orthogonaux, il suffit que d soit orthogonale à deux droites sécantes de P .

3) Plan médiateur

Définition : Soient A et B deux points. Le plan médiateur de $[AB]$ est le plan perpendiculaire à (AB) et passant par le milieu de $[AB]$.

Propriété 5 :

Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points de l'espace équidistants de A et de B .

4) Orthogonalité de plans

Définition

Deux plans (P) et (Q) sont dits perpendiculaires lorsque l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre plan.

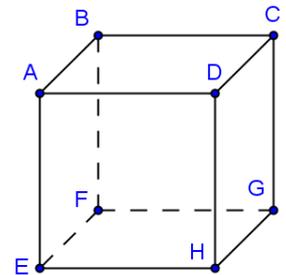
Propriété 6

Si deux plans sécants (P) et (P') sont perpendiculaires à un plan (Q) alors la droite d'intersection est perpendiculaire au plan (Q) .

Exemples

Dans un cube $ABCDEFGH$

- Les plans (CBF) et (ABC) sont perpendiculaires
- Les plans (AED) et (HDB) sont perpendiculaires au plan (ABC) donc l'intersection des deux plans (AED) et (HDB) est la droite (HD) , elle est perpendiculaire au plan (ABC) .



Remarque

Lorsque deux plans sont perpendiculaires, il existe dans chacun d'eux, des droites non orthogonales à l'autre : par exemple, la droite (FC) qui est contenue dans le plan (BCF) n'est pas orthogonale au plan (ABC) mais (BCF) est perpendiculaire au plan (ABC) .

V. Surfaces et volumes de solide

1) Les polyèdres

a) Définition

Un solide est un corps indéformable.

Un polyèdre est un solide qui possède plusieurs faces.

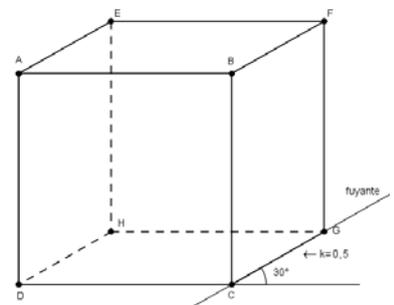
Le nombre de faces minimum est de 4 : **le tétraèdre.**

Exemple :

Représentation d'un cube avec un angle pour les fuyants de 30° et un coefficient de réduction de 0,5.

Remarque :

Dans cette représentation les distances ne sont plus conservées ainsi que les angles. Par contre le parallélisme est conservé.



b) Le prisme droit

Définition

Un prisme droit est un polyèdre ayant pour bases 2 polygones isométriques parallèles dont les faces latérales sont des rectangles

Exemple

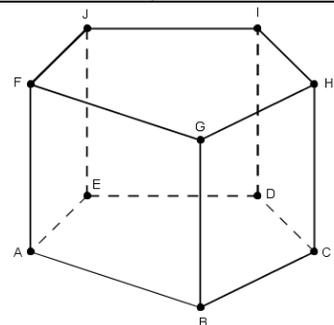
Si les bases ont n côtés alors le prisme droit a :

- $n + 2$ faces
- $2n$ sommets
- $3n$ arêtes

Volume = Aire de la base x hauteur

Surface = $2 \times$ (Aire de la base)

(Fond et couvercle) + Somme des Aires des rectangles (Aire latérale)



Cas particulier: Parallélépipède rectangle ou pavé droit.

Lorsque le prisme a pour base un rectangle, le prisme est un **parallélépipède rectangle** ou **pavé droit**

Parallélépipède rectangle

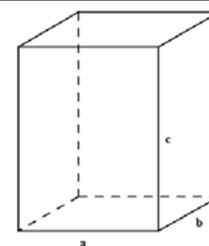
Volume = abc

Surface = $2(ab + ac + bc)$

Cube : si $a = b = c$

Volume = a^3

Surface = $6a^2$



c) Pyramide

Définition

Une pyramide est un polyèdre dont les arêtes sont obtenues en joignant les sommets d'un polygone (base) à un point non situé dans le plan de ce polygone.

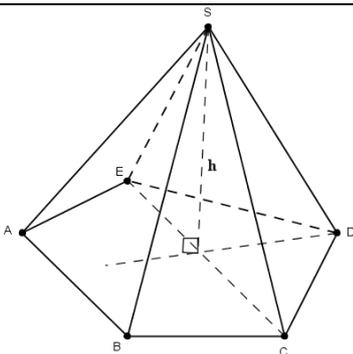
Exemple

Si la base a n côtés alors la pyramide a :

- $n + 1$ faces
- $n + 1$ sommets
- $2n$ arêtes

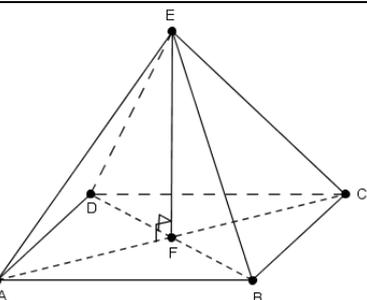
Volume = (Aire de la base x hauteur) / 3

Surface = Aire la base + Somme des Aires des triangles (Aire latérale)



Cas particulier

La pyramide à base carré et le tétraèdre sont des cas particulier de pyramide.

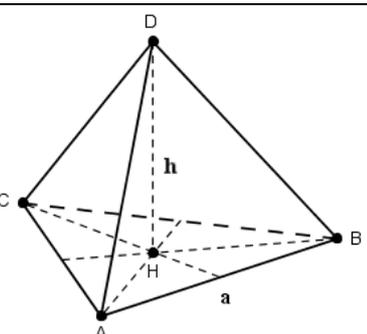


Un tétraèdre régulier a 4 triangles équilatéraux comme faces.

$$\text{Hauteur} = a \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Volume} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$$

$$\text{Surface} = 4 \times \text{Aire}_{ABC} = \sqrt{3}a^2$$



2) Solide de révolution**a) Le cylindre**

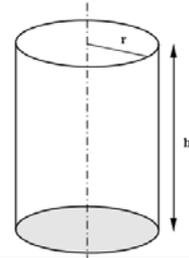
Définition

Un cylindre est obtenu par rotation d'une droite parallèle à l'axe de rotation

La droite qui engendre par rotation le cylindre s'appelle une génératrice

$$\text{Volume} = \pi r^2 h$$

$$\text{Surface} = \underbrace{2\pi r h}_{\text{laterale}} + \underbrace{2\pi r^2}_{\text{fond et couvercle}}$$

**b) Le cône****Définition:**

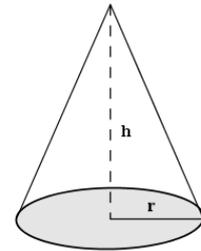
Un cône est obtenu par rotation d'une droite sécante à l'axe de rotation

La droite qui engendre par rotation le cône s'appelle une génératrice

$$\text{Volume} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$\text{Surface} = \underbrace{\pi r a}_{\text{laterale}} + \underbrace{\pi r^2}_{\text{fond}}$$

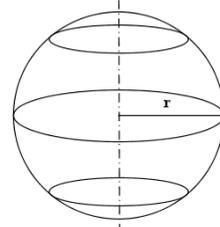
$$\text{Avec } a = \sqrt{r^2 + h^2}$$

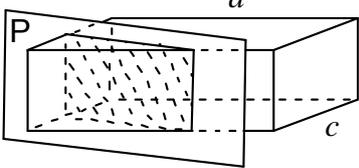
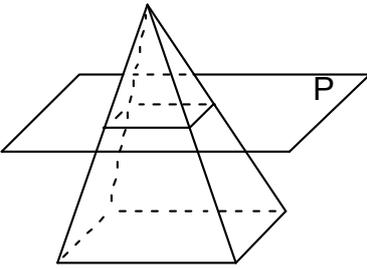
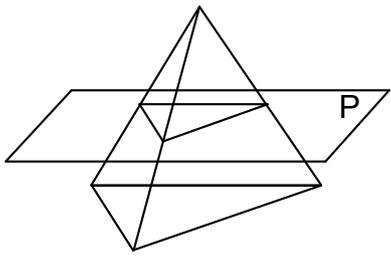
**c) La sphère****Définition:**

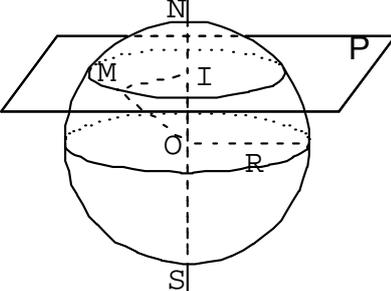
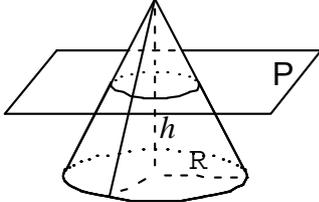
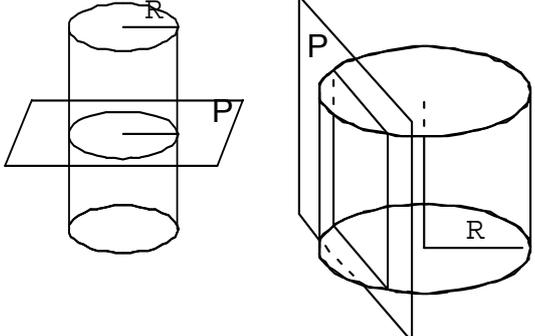
Une sphère est un ensemble de points de l'espace qui sont équidistants d'un centre.

$$\text{Volume} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{Surface} = 4\pi r^2$$

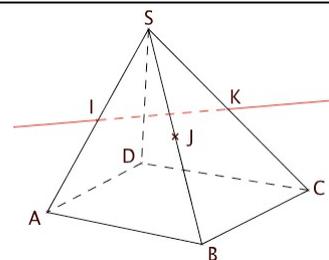


Pavé droit	Pyramide	Tétraèdre
		 <p data-bbox="1069 548 1484 616">Un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire</p>
<p data-bbox="151 627 255 660">$V = abc$</p> <p data-bbox="151 660 558 772">Si le plan P est parallèle à une arête, la section est un rectangle.</p>	<p data-bbox="590 627 861 683">$V = \frac{1}{3} \text{Base} \times \text{hauteur}$</p> <p data-bbox="590 694 1005 840">Si P est parallèle à la base, la section est un polygone dont les côtés sont parallèles à ceux de la base.</p>	<p data-bbox="1077 627 1348 683">$V = \frac{1}{3} \text{Base} \times \text{hauteur}$</p> <p data-bbox="1077 694 1524 840">Si P est parallèle à l'une des faces, la section est un triangle dont les côtés sont parallèles à ceux de la base</p>

Sphère	cône de révolution	cylindre de révolution
		
<p data-bbox="151 1321 295 1377">$V = \frac{4}{3} \pi R^3$</p> <p data-bbox="151 1388 566 1534">La section est un cercle. Si [NS] est le diamètre de la sphère, orthogonal au plan P en I, alors I est le centre du cercle.</p>	<p data-bbox="590 1321 805 1377">$V = \frac{1}{3} (\pi R^2) \times h$</p> <p data-bbox="590 1388 909 1534">Si P est parallèle à la base, la section est un cercle dont le centre se trouve sur l'axe du cône.</p>	<p data-bbox="949 1321 1197 1355">$V = \pi R^2 \times \text{hauteur}$</p> <ul data-bbox="949 1355 1524 1534" style="list-style-type: none"> • Si P est parallèle aux bases, la section est un cercle de même rayon que le cylindre et dont le centre se trouve sur l'axe du cylindre. • Si P est parallèle à l'axe, la section est un rectangle.

Exercice 1: Démontrer qu'une droite est parallèle à un plan

1. $SABCD$ est une pyramide. I , J et K sont les milieux respectifs de $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$. Démontrer que la droite (IK) est parallèle au plan ABC .
2. Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.



1. Dans le plan (SAC) , on applique le théorème des milieux : I et K sont les milieux respectifs de $[SA]$ et $[SC]$, donc la droite (IK) est parallèle à la droite (AC) .

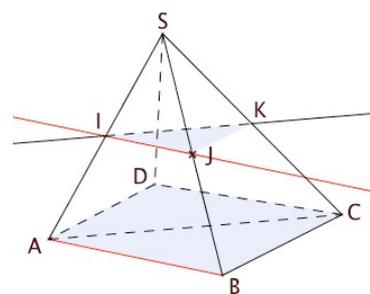
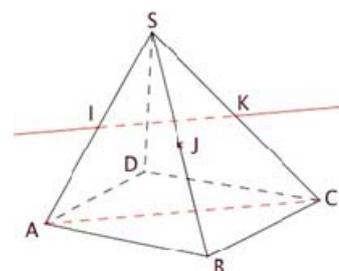
Pour prouver qu'une droite est parallèle à un plan, il suffit de prouver que cette droite est parallèle à une droite de ce plan.

Comme (AC) est une droite du plan (ABC) et que $(IK) \parallel (AC)$, on en déduit que (IK) est parallèle au plan (ABC) .

2. On a démontré dans la question précédente que (IK) est parallèle au plan (ABC) . On démontrerait de même que (IJ) est parallèle au plan (ABC) .

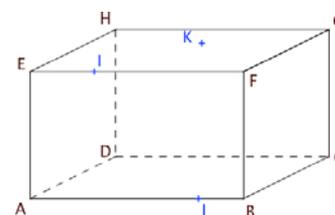
Les droites (IK) et (IJ) , sécantes en I , sont parallèles au plan (ABC) , d'après le théorème des plans parallèles, on en déduit que le plan (IJK) est parallèle au plan (ABC) .

Pour prouver que deux plans sont parallèles, il suffit de trouver deux droites sécantes d'un plan qui sont parallèles à l'autre plan (théorème des plans parallèles).



Exercice 2: Construire la section d'un solide par un plan

$ABCDEFGH$ est un pavé droit. I est un point de l'arête $[EF]$, J est un point de l'arête $[AB]$ et K est un point de la face $EFGH$. Construire la section du pavé par le plan (IJK) .



- Le plan (IJK) coupe la face $ABFE$ suivant la droite (IJ) . On commence donc par tracer le segment $[IJ]$.
- Le plan (IJK) coupe la face $EFGH$ suivant la droite (IK) . Soit L le point d'intersection de la droite (IK) avec l'arête $[HG]$. On trace le segment $[IL]$.
- D'après le théorème des plans parallèles 2, les faces $ABFE$ et $DCGH$ étant parallèles, le plan (IJK) coupe la face $DCGH$ suivant une droite parallèle à (IJ) . Le plan (IJK) coupe donc la face $DCGH$ suivant la droite parallèle à (IJ) et passant par L . On trace cette droite qui coupe l'arête $[CG]$ en M .
- On justifie de même que le plan (IJK) coupe la face $ABCD$ suivant la droite parallèle à (IK) passant par J . On trace cette droite qui coupe l'arête $[BC]$ en N .
- Pour finir la section, on trace le segment $[MN]$.

